

УДК 539.3

**АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ РАСЧЕТА ФОРМ МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
ДВИЖЕНИЮ В ГРУНТОВЫХ СРЕДАХ¹⁾****В.Л. КОТОВ, Е.Ю. ЛИННИК***НИИМ Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского**E-mail: vkotov@inbox.ru; ElenkaLinnik@gmail.com***THE ANALYSIS OF MODELS AND METHODS OF CALCULATION FORMS OF MINIMUM
RESISTANCE TO MOTION IN SOILS****V.L. KOTOV, E.Yu. LINNIK***Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod***Аннотация**

Проводится анализ моделей и методов решения задач поиска осесимметричных форм тел минимального сопротивления при проникании в мягкие грунтовые среды на основе моделей локального взаимодействия и модели грунтовой среды С.С. Григоряна. Образующая искомого тела аппроксимируется параметрическим полиномом Безье. Показано, что процессы сходимости последовательных приближений при расчете силы сопротивления в рамках двух моделей качественно подобны при существенном количественном отличии искомым форм минимального сопротивления.

Ключевые слова : Модель Григоряна, грунтовая среда, оптимизация, полином Безье

Summary

The analysis of models and methods of solving search problems axisymmetric bodies forms the minimum resistance at penetration into soil medium based on the model of local interaction and models of soil medium Grigoryan. Form the desired body is approximated by a polynomial parametric Bezier. It is shown that the processes of convergence of successive approximations in the calculation of the resistance forces in the two models are qualitatively similar with a significant quantitative difference between the desired forms of least resistance.

Key words: Model of Grigoryan, soil medium, optimization, polynomial Bezier.

Введение

Разработка методов построения форм тел, оптимальных по сопротивлению и/или глубине проникания в грунт в общей постановке возможна лишь при наличии упрощающих предположений о характере взаимодействия тела и среды. Большинство работ, посвященных решению задач оптимизации формы тела, основаны на использовании гипотезы локальности. Ранее решение вариационных задач при проникании оптимальных тел с торцом в среды типа металла или бетона осуществлялось на основе генетического алгоритма и с применением модификаций итерационного метода локальных вариаций. Каждая итерация является переходом от некоторой траектории к близкой к ней, лучшей по величине минимизируемого функционала. Несмотря на многообразие существующих численных методов, вопрос оптимизации форм тел при проникании в грунтовые среды не достаточно изучен. Для поиска формы тела вращения минимального сопротивления внедрению при заданной длине тела с учетом свойств грунтов, необходимо применять численные методы (см. [1]).

¹⁾Работа выполнена при поддержке ведущих научных школ РФ (НШ-593.2014.8) и РФФИ (проекты 13-08-00531 – а, 14-01-31113-мол – а)

1. Решение задачи оптимизации модифицированным методом локальных вариаций

Рассматривается стадия развитого проникания ударника длины L и радиуса миделя R при постоянной скорости внедрения V_0 , причем обтекание искомой головной части ударника грунтом происходит безотрывно (см. рис. 1 (слева)). Полное осевое сопротивление F проникающего тела описывается выражением:

$$F = \sigma_0 R_0^2 + 2\pi \int_{R_0}^R \sigma_n r dr + 2\pi \int_{R_0}^R \frac{\sqrt{1-\alpha^2}-1}{\alpha} \sigma_\tau r dr, \alpha = \sin \eta. \quad (1)$$

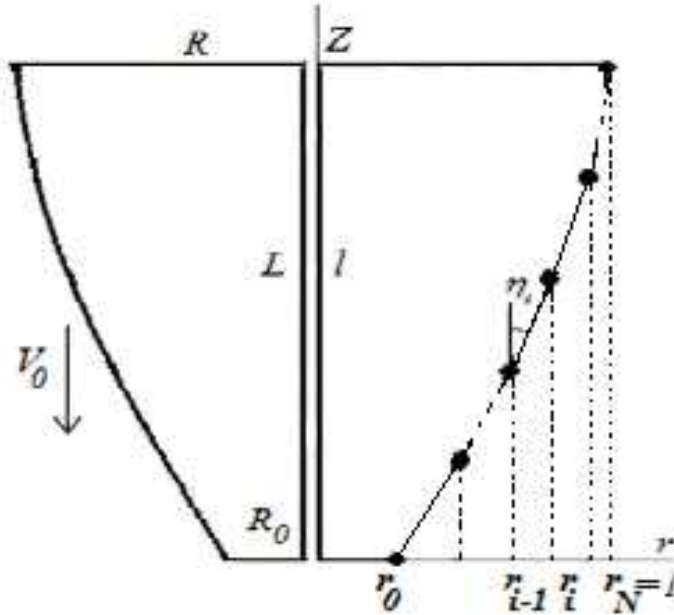


Рис. 1: Параметризация образующей искомого тела вращения в размерном виде (слева) и в безразмерной форме в виде ломаной (справа)

Здесь первое слагаемое обусловлено напряжениями, действующими на передний плоский торец тела радиуса R_0 (см. рис. 1), второе и третье слагаемые – соответственно нормальными σ_n и касательными σ_τ напряжениями, действующими на боковую поверхность тела. Согласно модели локального взаимодействия напряжения описываются трехчленной квадратичной зависимостью:

$$\sigma_n = \rho_0(AV_0^2\alpha^2 + BV_0\alpha + C), \sigma_0 = \rho_0(AV_0^2 + BV_0 + C)$$

касательные напряжения рассчитываются в соответствии с законом Кулона:

$$\sigma_\tau = k_f \sigma_n$$

с постоянной трения k_f . Коэффициенты A , B и C определяются на основе одномерной задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде (см. [2, 3])

Безразмерная сила сопротивления внедрению с учетом введенных обозначений $D = \frac{F}{(\rho_0 V_0^2 S A)}$, $S = \pi R^2$ – площадь миделя; $\sigma = \sigma_n / (\rho_0 V_0^2 A)$, $r_0 = R_0 / R$, $l = L / R$, $\tilde{B} = B / (AV_0)$, $\tilde{C} = C / (AV_0^2)$ примет следующий вид:

$$D(r) = (1 + \tilde{B} + \tilde{C})r_0^2 + 2 \int_{r_0}^1 f(\alpha) r dr, f(\alpha) = (1 + k_f \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha})(\alpha^2 + B\alpha + C), \quad (2)$$

Таким образом имеем следующую задачу вариационного исчисления: необходимо определить такую выпуклую кривую $r(z)$, $r(l) = 1$, что полное сопротивление имеет минимум: $D(r) \rightarrow \min$.

Для приближенного решения задачи оптимизации формы искомую образующую можно представить в виде кусочно-линейной ломаной (см. рис. 1 (справа)) или в виде полинома Безье второго порядка (см. рис. 1 (слева)).

С учетом первого представления сила сопротивления имеет вид:

$$D = D_0 + \sum_{i=1}^N D_i, \quad D_0 = (1 + \tilde{B} + \tilde{C})r_0^2, \quad (3)$$

$$D_i = \left(1 + k_f \frac{\sqrt{1 - \alpha_i^2}}{\alpha_i}\right) (\alpha_i^2 + \tilde{B}\alpha_i + \tilde{C}) (r_i^2 - r_{i-1}^2), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где координаты z_i распределяются по длине тела с шагом Δz_i , $\alpha_i = \sin \eta_i = \Delta r_i / \sqrt{\Delta z_i^2 + \Delta r_i^2}$, $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, N$, $r_N = 1$.

Таким образом, задача вариационного исчисления сводится к решению задачи безусловной оптимизации. При этом необходимо найти такой набор координат (r_0, \dots, r_{N-1}) , представляющий выпуклую образующую тела вращения, что интегральная сила сопротивления внедрению (1) достигает минимума: $D(r_0, \dots, r_{N-1}) \rightarrow \min$. При этом отметим, что поиск образующей оптимального тела осуществляется в классе затупленных тел. Представленный алгоритм реализует частный случай известного метода локальных вариаций.

Вектор неизвестных $r = r_i, i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ищется среди локальных экстремумов (3), для определения которых составляется система уравнений

$$f(r) = \partial D / \partial r_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (4)$$

Система нелинейных уравнений (4) решается сходящимся итерационным методом Ньютона. Таким образом, для определения приращений компонент вектора координат на каждой итерации метода Ньютона решается система алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей методом прогонки

$$\{\partial^2 D / \partial r_i \partial r_j\}^k \Delta r_j^{k+1} = -\{\partial D / \partial r_i\}^k, \Delta r_j^{k+1} = r_j^{k+1} - r_j^k, I, j = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (5)$$

Компоненты левой и правой частей системы (5) определяются точно (см. [4]) или приближенно, методом конечных разностей (см. [5]).

В качестве начального приближения в итерационном процессе (5) рассмотрим усеченный конус ($N = 1$). Решение данной задачи в рамках одночленной МЛВ ($\sigma_n = \rho_0 A V_0^2 \alpha^2$) может быть получено в конечном виде. В случае, когда напряжение определяется только квадратом нормальной скорости и в отсутствии поверхностного трения, из (3) следует выражение для безразмерной силы сопротивления внедрению усеченного конуса:

$$D = r_0^2 + (1 - r_0^2) / (1 + l^2 / (1 - r_0^2)) \quad (6)$$

Форма тела, при котором достигается минимум силы сопротивления внедрению, определяется из условия равенства нулю производной функции: $dD/dr_0 = 0$, т.е. в случае описания напряжения одночленной моделью локального взаимодействия радиус притупления не зависит от коэффициента A и скорости удара.

Как отмечалось ранее, образующая искомого тела так же может быть описана квадратичным полиномом Безье. Рассмотрим данное представление в рамках двумерных расчетов. В этом случае нелинейно-сжимаемая грунтовая среда С.С. Григоряна описывается системой дифференциальных уравнений, сжимаемость среды отражается ударной адиабатой. Неподвижный ударник считается жестким. На головной части ударника, контактирующей с грунтовой средой, принимается условие "непроницаемости" по нормали со "скольжением по касательной". Определенная таким образом сила сопротивления соответствует силе на квазистационарной стадии внедрения с постоянной скоростью, полученной при прямом ударе.

Численные расчеты проводятся при значениях параметров среды, соответствующих сухой песчаной смеси естественного состава с применением пакета прикладных программ «Динамика-2». Поиск формы тела вращения минимального сопротивления осуществляется методом циклического покоординатного спуска.

В результате численных расчетов отмечено, что процесс последовательных приближений качественно близок в случае постановки на основе МЛВ, при этом наблюдается существенное отличие в формах оптимальных тел и их сопротивлении.

2. Сравнительный анализ результатов модельных расчетов с данными компьютерного моделирования процесса проникания.

Проведено сравнение сил сопротивления внедрению ударников с различными формами оголовков в рамках модели локального взаимодействия и в двумерной осесимметричной постановке при различных значениях коэффициента внутреннего трения. Численные расчеты проведены с применением ППП «Динамика-2» при следующих значениях параметров квадратичной по скорости МЛВ: $\tilde{B} = 0.17$, $\tilde{C} = 0.1$, соответствующих воздействию сухой песчаной смеси естественного состава. Коэффициент поверхностного трения $k_f = 0.3$. Безразмерная длина ударника $l = \sqrt{5}$, скорость проникания $V_0 = 400$ м/с. Результаты сравнений приведены в таблице. В первом столбце представлены формы сравниваемых тел: затупленный конус, оптимальное тело и конический ударник. Во втором столбце представлены значения силы сопротивления внедрению, полученные в рамках квадратичной модели локального взаимодействия, в третьем столбце – в двумерной осесимметричной постановке с использованием ППП «Динамика-2».

<div> <div> <div></div> <div>Модель($\mu=0.6$)</div> </div> <div> <div>Форма тела</div> <div></div> </div> </div>		F_1 , кН (МЛВ)	F_2 , кН (МСС)	$\frac{F_2 - F_1}{F_2}$, %
	(МЛВ)	49,2	41,2	20
	(МСС)	55,4	36,6	51
	(Конус)	58,1	59,8	3

Из таблицы видно, что для грунтовой среды С.С. Григоряна с учетом поверхностного трения сила сопротивления внедрению конических тел близки по разным моделям (отличие не превышает 3%), а для оптимальных тел силы различаются в полтора раза. Для затупленных тел различия порядка 20%.

3. Заключение.

Анализ моделей и методов решения задач поиска оптимальной формы тел вращения при их проникании в грунтовые среды на основе МЛВ и модели грунтовой среды С.С. Григоряна в осесимметричной постановке показал, что методика расчета полей давлений в окрестности головной части тела должна учитывать двумерные эффекты обтекания, а МЛВ целесообразно использовать в качестве предварительных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Баженов В.Г., Баландин В.В., Григорян С.С., Котов В.Л.** Анализ моделей расчета движения тел вращения минимального сопротивления в грунтовых средах // ПММ. — 2014. — Т. 78, Вып. 1. — С. 98–115.
2. **Котов В.Л., Линник Е.Ю., Тарасова А.А.** Определение параметров квадратичной модели локального взаимодействия при внедрении сферического ударника в мягкий грунт // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. — 2013. — Вып. 75, № 1. — С. 47–55.
3. **Котов В.Л., Линник Е.Ю.** Методика расчета форм тел вращения минимального сопротивления внедрению в грунтовые среды // IX Всероссийская конференция «Сеточные методы для краевых задач и приложения», 17-22 сентября 2012, Казань.—С. 242-246.
4. **Котов В.Л., Линник Е.Ю.** Численный расчет формы тела вращения минимального сопротивления движению в грунтовой среде // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. — 2013. — Вып. 75, № 4. — С. 77–83.
5. **Котов В.Л., Линник Е.Ю.** Численный расчет оптимальной формы тела вращения при движении с постоянной скоростью в грунтовой среде // Вычислительная механика сплошных сред. — 2014. — Т. 7, № 2. — С. 142–150.

REFERENCES

1. **Bazhenov V.G., Balandin V.V., Grigoryan S.S. and Kotov V.L.** Analysis of models for calculating the motion of solids of revolution of minimum resistance in soil media // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2014. — V. 78, № 1. — P. 65–76.
2. **Kotov V.L., Linnik E.Yu., Tarasova A.A.** Defining the parameters of the quadratic model of local interaction in the implementation of a spherical impactor in soft ground [Opredeleniye parametrov kvadrachichnoy modeli lokal'nogo vzaimodeystviya pri vnedrenii sfericheskogo udarnika v myagkiy grunt] // Problems of strength and plasticity. — 2013. — № 75 (1). — P. 47–55 (in Russian).
3. **Kotov V.L., Linnik E.Yu.** Method of calculating the form of bodies of rotation minimal drag in the implementation of ground medium [Metodika rascheta form tel vrashcheniya minimal'nogo soprotivleniya vnedreniyu v gruntovyye sredy] // IX Vserossiyskaya konferentsiya «Setochnyye metody dlya krayevykh zadach i prilozheniya», 17-22 september 2012. — Kazan: Otechestvo, 2012. — P. 242–246 (in Russian).
4. **Kotov V.L., Linnik E.Yu.** Numerical calculation of the shape of the body of rotation of the minimum resistance to movement in the soil medium [Chislennyy raschet formy tela vrashcheniya minimal'nogo soprotivleniya dvizheniyu v gruntovoy srede] // Problems of strength and plasticity. — 2013. — № 75 (4). — P. 77–83 (in Russian).
5. **Kotov V.L., Linnik E.Yu.** Numerical calculation of the optimum shape of a body of revolution moving at steady speed in the soil environment [Chislennyy raschet optimal'noy formy tela vrashcheniya pri dvizhenii s postoyannoy skorost'yu v gruntovoy srede] // Computational continuum mechanics [Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred]. — 2014. — V. 7, № 2. — P. 142–150 (in Russian).